

Cours – Séquence n° 1 – SUITES (I) :

limites, comparaison, opérations

I- RAPPELS SUR LES SUITES NUMERIQUES

1. Généralités

Définition Une **suite réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations

- u_n : lire « **u indice n** » ou « **terme d'indice, ou de rang n** » ou encore « **terme général de la suite u** ».
- La suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) ou encore u .

Remarque

Une suite peut être définie :

- explicitement par une **fonction** $u_n = f(n)$ (exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 2n + 3$) ;
- ou par **réurrence** (exemple : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$).

Définitions

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite est **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

- On peut **comparer directement** u_n et u_{n+1} grâce aux propriétés des inégalités.
- On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite (u_n) est définie explicitement par $u_n = f(n)$, on peut étudier **les variations de la fonction f** .
- Si tous les termes de la suite (u_n) sont **strictement positifs**, on peut comparer le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. $\xrightarrow{\times u_n} u_{n+1} > u_n$
- Si la suite est définie par **réurrence**, on peut utiliser **une démonstration par récurrence**.

2. Cas particuliers : suites arithmétiques et suites géométriques

a. S'il existe un nombre r tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$: cas d'une **suite arithmétique de raison r** .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_1 + (n-1)r$; pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Somme des premiers termes d'une suite arithmétique : **nombre de termes $\times$ $\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$** .

b. S'il existe un nombre q tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$: cas d'une **suite géométrique de raison q** .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_1 \times q^{n-1}$; pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- Somme des premiers termes d'une suite géométrique (raison $\neq 1$) : **1^{er} terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$** .

II- LIMITE FINIE OU INFINIE D'UNE SUITE

Etudier la limite d'une suite c'est étudier son comportement lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

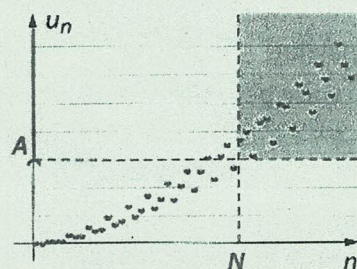
1. Limite infinie

Définition

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que pour tout réel strictement positif A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarques

- Cela signifie que les termes u_n deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang. Aussi grand que soit le nombre A , on peut trouver un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. En terme imagés, « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A , les termes u_n finissent par passer définitivement au-dessus ».



- Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > A$
quel que / pour tout il existe tel que implique

Exemple 1 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2$.

Conjecturer la limite de la suite (u_n) puis démontrer avec la définition.

Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{*+}$

Or, $u_n > A \Leftrightarrow 3n^2 > A$

$\Leftrightarrow n^2 > \frac{A}{3}$, car $3 > 0$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A}{3}}$, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

Il suffit de choisir N le plus petit entier supérieur à $\sqrt{\frac{A}{3}}$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > A$

Pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exemple 2 Les suites de référence de limite $+\infty$ à connaître ($k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $p \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les suites (kn) , (kn^p) et $(k\sqrt[n]{n})$ ont pour limite $+\infty$.

Exemple 3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n$.

On a calculé les dix premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	u_n	2	8	32	128	512	2048	8192	32768	131072	524288

1. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule C2, puis étendue vers la droite ?

$=4*B2$

2. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

Il semble que (u_n) soit croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Que fait l'algorithme ci-dessous ?

Cet algorithme calcule et affiche le premier rang n tel que $u_n > A$

Langage naturel
Définir fonction seuil(A)
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 2$
Tant que $u \leq A$
$n \leftarrow n + 1$
$u \leftarrow 4u$
Fin Tant que
Afficher n

4. Programmer la calculatrice dans le langage adapté et tester ce programme pour $A = 100$.

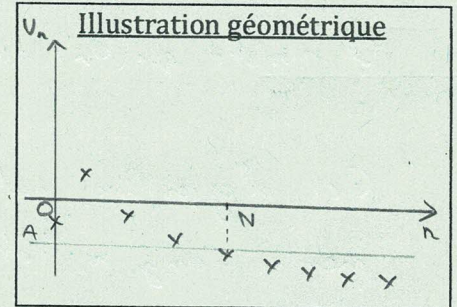
TI	CASIO	Python
PROGRAM: SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U ≤ A : N+1→N : 4×U→U :End :Disp N	=====SEUIL "A="?→A 0→N 2→U While U ≤ A N+1→N 4×U→U WhileEnd N	def seuil(a): n=0 u=2 while u ≤ a: n=n+1 u=4*u return(n)

Définition

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que pour tout réel strictement négatif A , l'intervalle $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarques

1. Cela signifie que les termes u_n deviennent aussi petits qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
Aussi petit que soit le nombre A , on peut trouver un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < A$.
En terme imagés, « aussi basse que l'on place la barrière horizontale A , les termes u_n finissent par passer définitivement en-dessous ».



2. Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ signifie } \forall A \in \mathbb{R}^{*-}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n < A$$

Exemple 1 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = -\sqrt{n-1}$.

1. Conjecturer la limite de la suite (v_n) puis démontrer avec la définition.
 2. Déterminer à partir de quelle valeur de n , v_n est strictement inférieure à -10^3 .
- Conjecture: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$*

1. Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{*-}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow v_n < A$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{*-}$. Or, (1) : $v_n < A \Leftrightarrow -\sqrt{n-1} < A$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{n-1} > -A, \text{ car } -1 < 0$$

$$(1) \Leftrightarrow n-1 > (-A)^2, \text{ car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}.$$

$$(1) \Leftrightarrow n > (-A)^2 + 1$$

Il suffit de choisir N le plus petit entier supérieur à $(-A)^2 + 1$.

Ainsi, $\forall A \in \mathbb{R}^{*-}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow v_n < A$. Don $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

2. Si $A = -10^3$, don $N = 1000002$

Exemple 2 Les suites de référence de limite $-\infty$ à connaître ($k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $p \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les suites $(-kn)$, $(-kn^p)$ et $(-k\sqrt{n})$ ont pour limite $-\infty$.

2. Limite finie

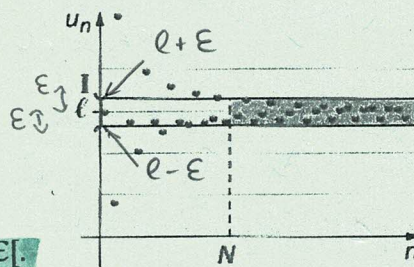
Définition

0_e

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite nombre réel l quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- On dit aussi que la suite (u_n) converge vers l ou est convergente vers l et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarques

- Cela signifie que les termes u_n deviennent aussi proches de l qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang. Aussi petite que soit la longueur d'un intervalle ouvert I contenant l , on peut trouver un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in I$. En terme imagés, « aussi étroite que soit la bande autour de la droite d'équation $y = l$, les termes u_n finissent par y entrer définitivement ».



- Avec les quantificateurs, cette définition peut s'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ signifie } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[.$$

- Lorsqu'elle existe, la limite l de la suite est unique.

Exemple 1 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{3n}$.

- Conjecturer la limite de la suite (u_n) puis démontrer avec la définition.
- Écrire un algorithme permettant de déterminer la première valeur de n à partir de laquelle $u_n < 10^{-3}$.

1) Conjecture : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Il nous faut que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow u_n \in]-\varepsilon; \varepsilon[$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$

$$O, u_n \in]-\varepsilon; \varepsilon[: (2) \Leftrightarrow 0 < u_n < \varepsilon, \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3n} > 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \varepsilon$$

$$(2) \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$

$$(2) \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon}, \text{ car } 3 > 0$$

Il suffit de choisir N le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{3\varepsilon}$

2) Définir fonction seule (ε)

$$n \leftarrow 1$$

$$u \leftarrow \frac{1}{3}$$

Tant que $u > \varepsilon$

$$n \leftarrow n + 1$$

$$u \leftarrow \frac{1}{3n}$$

fin tant que
affiche (n)

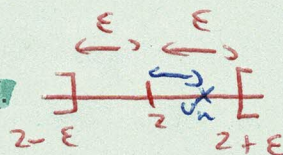
Exemple 2 Les suites de référence de limite 0 à connaître ($k \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$)

On admet que les suites $\left(\frac{k}{n}\right)$, $\left(\frac{k}{n^p}\right)$ et $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$ ont pour limite 0.

Exemple 3 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

1. Conjecturer la limite l de la suite (v_n) puis démontrer avec la définition.
2. À partir de quel rang N la distance entre v_n et l est-elle strictement inférieure à 0,001 ?

1. Il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ signifie $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow v_n \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$.



Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$. Montrons que $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow |v_n - 2| < \varepsilon$

Or, (1) : $|v_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n+3} - \frac{2n+6}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \varepsilon$$

$$(1) \Leftrightarrow 5 < \varepsilon(n+3), \text{ car } n+3 > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow n+3 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$(1) \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

Il suffit de choisir N le plus petit entier supérieur à $\frac{5}{\varepsilon} - 3$.

Ainsi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow v_n \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$. *Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$*

2. *Si $\varepsilon = 10^{-3}$, alors $N = 4908$*

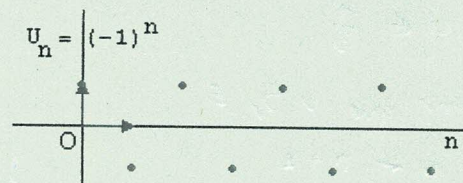
3. Suites qui n'ont pas de limite

Il existe des suites qui n'admettent aucune limite.

Exemples Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = (-1)^n; v_n = \cos(n) \text{ et } w_n = \sin(n).$$

Ces suites n'ont pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

**Définition**

On dit qu'une suite diverge ou est divergente lorsqu'elle n'a pas de limite ou lorsqu'elle admet une limite infinie.

III- OPÉRATIONS ET LIMITES

Théorèmes (admis) : règles opératoires

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ et l et l' deux nombres réels.

• **Limite d'une somme**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FL*

* **Forme indéterminée** : on ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

• **Limite d'un produit**

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l \neq 0$	$l \neq 0$	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) =$	ll'	∞	∞	FL

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

• **Limite d'un quotient**

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	FL	FL

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarques

1. Exemple d'un cas de forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Dans chacun des cas ci-dessous, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

- **Cas 1** : si $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$.
- **Cas 2** : si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n + v_n = -n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.
- **Cas 3** : si $u_n = 2n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

On constate que trois réponses différentes sont possibles.

2. En cas de forme indéterminée, on utilisera des « astuces » permettant de « lever l'indétermination ».

Exemples Déterminer la limite des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par : a. $u_n = n^2 + 4n$; b. $u_n = \frac{3}{-5\sqrt{n} - n^3}$;
c. $u_n = n^2 - 5n + 2$; d. $u_n = \frac{-7n^2}{1-n}$ ($n \geq 2$); e. $u_n = \frac{2n^2 + 3n}{10n^2 - 4}$; f. $u_n = \sqrt{n+10} - \sqrt{n}$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + 4n$

• On $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n = +\infty$

} Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3}{-5\sqrt{n} - n^3}$

• On $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$

} Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5\sqrt{n} - n^3) = -\infty$

Donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 - 5n + 2$ c'est une forme indéterminée

"Astuce 1": on factorise par le terme prépondérant

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$

• On $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$

Et, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$

} Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 1$

• D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$. Donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, u_n = \frac{-7n^2}{1-n}$ c'est une forme indéterminée

"Astuce 1 bis": on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant et on simplifie

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, u_n = \frac{n^2 \times (-7)}{n \left(\frac{1}{n} - 1\right)}$

$u_n = \frac{-7n}{\frac{1}{n} - 1}$

• Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7n = -\infty$

Et, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$

} Donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{2n^2 + 3n}{10n^2 - 4}$ C'est une forme indéterminée

"Astuce 1 bin":

$\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{n^2(2 + \frac{3}{n})}{n^2(10 - \frac{4}{n})}$

$U_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{10 - \frac{4}{n}}$

• Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{3}{n}) = 2$ } Donc, par quotient,

Et, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (10 - \frac{4}{n}) = 10$ } $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \sqrt{n+10} - \sqrt{n}$ C'est une forme indéterminée

"Astuce 2": On multiplie et on divise par l'expression dite "conjugée"

• $\forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}}$

$U_n = \frac{(\sqrt{n+10})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}}$

$U_n = \frac{n+10 - n}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}}$

$U_n = \frac{10}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}}$

• Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+10} = +\infty$

Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+10} + \sqrt{n}) = +\infty$

Identités remarquables:

Ainsi, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

IV- LIMITES ET COMPARAISON

1. Théorème de comparaison : limite infinie

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

(1) à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Démonstration*

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{*+}$

• D'après la condition (1), $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq v_n$

• D'après (2), $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq A$

Il suffit de choisir N le plus grand entier entre N_1 et N_2

$N_{\max} = (N_1; N_2)$

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq v_n \geq A$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exemple 1 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 \leq u_n$

• Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$

Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exemple 2 1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Indication : on prouvera d'abord que pour tout réel x , $e^x > x$.

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

1) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x$, c'est-à-dire montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x$

• φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 1$

• $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

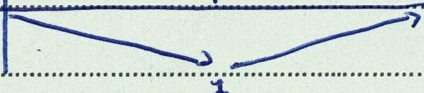
$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

• φ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en 0.

c'est $\varphi(0) = e^0 - 1$

$\varphi(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$	-	0	+
variation de φ			

• Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geq 0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, e^n > n$ } donc, d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$
 Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

2) d'après 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

Remarque On peut compléter la liste des suites de référence dont la limite est à connaître ($k \in \mathbb{R}^{*+}$):

1. (ke^n) a pour limite $+\infty$.

2. $(-ke^n)$ a pour limite $-\infty$.

3. $\left(\frac{k}{e^n}\right)$ a pour limite 0 et $\left(\frac{-k}{e^n}\right)$ a pour limite 0.

Remarque Théorème analogue en $-\infty$.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

(1) à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n^2 - n - 1$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq -n$ et en déduire que la suite (v_n) diverge.

• $\forall n \in \mathbb{N}, -v_n^2 \leq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, -v_n^2 - n - 1 \leq -n - 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq -(n+1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq -n$

• Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$

Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

2. Théorème des gendarmes : limite finieThéorème

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

(1) à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ (avec l un nombre réel)

alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Démonstration

Notions que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, c'est à dire $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$

D'après (1) $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow v_n \leq u_n \leq w_n$

D'après (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow v_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

D'après (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, donc $\exists N_3 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_3 \Rightarrow w_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Il suffit de choisir $N = \max(N_1, N_2, N_3)$

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Exemple Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1 + (\cos(n))^2}{\sqrt{n}}$. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2(n) \leq 1$$

$$1 \leq 1 + \cos^2(n) \leq 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1 + \cos^2(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \text{ car } \sqrt{n} > 0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

Alors, d'après le Théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$